MATHÉMATIQUES

(Option générale)

PREMIÈRE COMPOSITION

Durée : 3 heures

1. On désigne par E l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ constitué par la fonction nulle et les fonctions polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à trois.

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$.

Soit φ l'application de E dans $\mathbb{R}^4$ définie par :

$$\varphi(P) = (P(a), P'(a), P(b), P'(b))$$

où P' désigne la dérivée de P.

1.1. Quelle est la dimension de E ?

Montrer que φ est une application linéaire bijective de E sur $\mathbb{R}^4$.

1.2. Soit φ^{-1} la bijection réciproque de φ.

Déterminer $P_3 = \varphi^{-1}((0,0,1,0))$ et $P_4 = \varphi^{-1}((0,0,0,1))$.

1.3. Soit $P_1 = 1 - P_3$, et soit P_2 défini par $P_2(x) = -P_4(a+b-x)$.

Vérifier que : $P_1 = \varphi^{-1}((1,0,0,0))$ et $P_2 = \varphi^{-1}((0,1,0,0))$.

1.4. Vérifier que : $\displaystyle\int_a^b P_3(t)\,dt = \frac{b-a}{2}$

et $\displaystyle\int_a^b P_4(t)\,dt = -\frac{(b-a)^2}{12}$.

Calculer $\displaystyle\int_a^b P_1(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_a^b P_2(t)\,dt$.

1.5. Montrer que (P_1, P_2, P_3, P_4) est une base de E.

En déduire que :

$$\forall P \in E \qquad \int_a^b P(t)\,dt = \frac{b-a}{2}(P(a)+P(b)) + \frac{(b-a)^2}{12}(P'(a)-P'(b)).$$

2. Soit f une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ possédant des dérivées continues au moins jusqu'à l'ordre 4.

a et b étant deux réels tels que $a < b$, on associe à f le polynôme P_f de E tel que :

$P_f(a) = f(a)$, $P_f'(a) = f'(a)$, $P_f(b) = f(b)$ et $P_f'(b) = f'(b)$.

2.1. Pour tout réel u, on pose :

$$\psi(u) = \int_a^u f(t)\,dt - \frac{u-a}{2}(f(a)+f(u)) - \frac{(u-a)^2}{12}(f'(a)-f'(u)).$$

Montrer que ψ est au moins trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

Calculer $\psi(a)$, $\psi'(a)$, $\psi''(a)$ et $\psi'''(u)$.

2.2. On pose : $M = \sup_{u \in [a,b]} |f^{(4)}(u)|$

où $f^{(4)}$ désigne la dérivée quatrième de f.

Montrer que : $\forall x \in [a,b]$

$$|\psi''(x)| \leqslant \frac{M(x-a)^3}{36},$$

$$|\psi'(x)| \leqslant \frac{M(x-a)^4}{144},$$

$$|\psi(x)| \leqslant \frac{M(x-a)^5}{720}.$$

2.3. Montrer que :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)) + \frac{(b-a)^2}{12}(f'(a)-f'(b)) + R$$

avec : $|R| \leqslant \dfrac{(b-a)^5}{720} M$.

2.4. Comparer R et l'intégrale $\displaystyle\int_a^b [f(t) - P_f(t)]\,dt$.

3. Soit la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Tournez la page S. V. P.

3.1. Montrer que les intégrales $\int_{-\infty}^{\alpha} f(t)\,dt$ et $\int_{-\infty}^{+\alpha} f(t)\,dt$ existent (α étant un réel quelconque).

Rappeler la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$.

On pose : $g(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$.

On se propose de calculer $g(1)$ avec au moins trois chiffres exacts après la virgule.

Pour tout couple (a, b), $(a < b)$, on pose :

$$\lambda_{a,b} = \int_a^b P_f(t)\,dt = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)) + \frac{(b-a)^2}{12}(f'(a) - f'(b)).$$

3.2. Déterminer $f^{(4)}(x)$, puis :

$$M = \sup_{x \in [0,1]} f^{(4)}(x),$$

$$M_1 = \sup_{x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]} f^{(4)}(x),$$

et $$M_2 = \sup_{x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]} f^{(4)}(x).$$

3.3. Donner une valeur approchée de $\lambda_{0,1}$.

En utilisant les résultats de la partie 2., en déduire un encadrement pour $g(1)$.

La méthode ainsi employée pouvait-elle permettre d'obtenir avec certitude les trois premières décimales de $g(1)$?

3.4. Donner une valeur approchée de $\lambda_{0,\frac{1}{2}}$ et de $\lambda_{\frac{1}{2},1}$.

En déduire un encadrement pour $g(1)$.

N.B. — On écrira sur la copie, les six premières décimales données par la calculatrice pour les valeurs approchées de M, M_1, M_2, $\lambda_{0,1}$, $\lambda_{0,\frac{1}{2}}$, $\lambda_{\frac{1}{2},1}$.

• • •

•

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail